

Acknowledgements: Supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR): grant 13-01-00952-a, Goszadan. Minobr.: 1.3445.2011.

Малашонок Н.А. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Преобразование Лапласа используется для решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Построен символьно-численный алгоритм. Численная составляющая относится к представлению функции, вовлеченной в процесс, в виде некоторого ряда.

Ключевые слова: преобразования Лапласа; дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.

УДК 517.529

МЕТОД TEST-УРАВНЕНИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

© В.В. Малыгина

Ключевые слова: разностное уравнение; последствие; экспоненциальная устойчивость; равномерная устойчивость.

Предлагается метод исследования устойчивости решений линейных скалярных разностных уравнений с последствием. Семейству уравнений исследуемого класса ставится в соответствие test-уравнение, изучение свойств которого позволяет получить эффективное описание области устойчивости всех уравнений семейства.

В работах [1–3] предложен метод исследования устойчивости функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ), суть которого состоит в том, что об асимптотическом поведении решений семейства ФДУ можно судить по поведению одного, специально построенного уравнения (*test-уравнения*). Оказалось, что тот же метод можно применить к исследованию разностных уравнений. Как уже не раз отмечалось [4–6], разностные уравнения по своим свойствам близки к ФДУ.

Рассмотрим следующий класс разностных уравнений:

$$x(n+1) - x(n) = a_0 x(n) - \sum_{k=1}^N a_k x(n - h_k(n)), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (1)$$

где $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_k \geq 0$, $0 \leq h_k(n) \leq H_k$ для всех $k = \overline{1, N}$.

Пусть в уравнении (1) фиксирован набор коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_N$ и границ запаздываний $H_1, H_2, \dots, H_N$. Назовем *семейством* (1) множество уравнений вида (1) при

любых функциях h_k , удовлетворяющих заданным оценкам. Семейство уравнений называется *устойчивым*, если устойчивы все входящие в него уравнения. Поставим в соответствие семейству (1) автономное уравнение

$$y(n+1) - y(n) = a_0 y(n) - \sum_{k=1}^N a_k y(n - H_k), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2)$$

дополненное начальными условиями $y(\xi) = 1$ при $\xi \leq 0$. Уравнение (2) будем называть *test-уравнением*.

Обозначим $l = \min\{n \geq 0 : y(n+1) - y(n) \geq 0\}$ первую точку минимума решения уравнения (2). Случай $l = \infty$ не исключается; он соответствует ситуации, когда y монотонно убывает на полуоси.

Следующие теоремы сводят исследование устойчивости семейства (1) к исследованию конкретного свойства решения test-уравнения.

Т е о р е м а 1. *Для экспоненциальной устойчивости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнения одного из условий:*

- $l = \infty, \quad a_0 < \sum_{k=1}^N a_k, \quad \sum_{k=1}^N a_k H_k < 1;$
- $l < \infty, \quad y(l) > -1.$

Т е о р е м а 2. *Для равномерной устойчивости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнения одного из условий:*

- $l = \infty, \quad a_0 \leq \sum_{k=1}^N a_k, \quad \sum_{k=1}^N a_k H_k < 1;$
- $l < \infty, \quad y(l) \geq -1.$

Проиллюстрируем теорему 1 следующим примером. Рассмотрим семейство уравнений

$$x(n+1) - x(n) = -ax(n) - bx(n - h(n)), \quad (3)$$

где $a, b > 0, \quad 0 \leq h(n) \leq 1$.

Обозначим через D область на плоскости, ограниченную линиями $u \pm v = 2, \quad u + v = 0, \quad u = 0$ и $v = \frac{(1+u)^2+1}{u+2}$ (см. рис. 1).

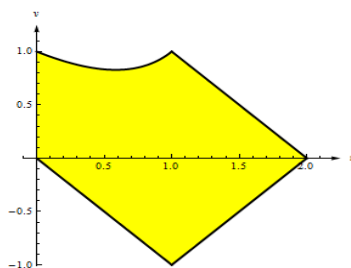


Рис. 1. Область экспоненциальной устойчивости семейства (3)

С л е д с т в и е 1. *Семейство уравнений (3) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда $(a, b) \in D$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Малыгина В.В., Чудинов К.М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. I // Изв. вузов. Серия Математика. 2012. №6. С. 25-36.

2. Малыгина В.В., Чудинов К.М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. II // Изв. вузов. Серия Математика. 2012. №7. С. 1-13.
3. Малыгина В.В., Чудинов К.М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. III // Изв. вузов. Серия Математика. 2012. №8. С. 44-56.
4. Cooke K.L., Wiener J. Retarded differential equations with piecewise constant delays // Comp. Math. Appl. 1999. V. 38. P. 229-237.
5. Gyori I., Hartung F. Stability in delay perturbed differential and difference equation // Fields Inst. Commun. 2001. V. 29. P. 181-194.
6. Куликов А.Ю., Малыгина В.В. Об устойчивости неавтономных разностных уравнений с несколькими запаздываниями // Изв. вузов. Серия Математика. 2008. №3. С. 18-26.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 13-01-96050).

Malygina V.V. THE TEST-EQUATION METHOD IN INVESTIGATION OF STABILITY OF DIFFERENCE EQUATIONS

A method is proposed for investigation of the stability of solutions to linear scalar difference equations. A test equation is put into correspondence to a family of equations of the class are investigated. The study of properties of the test equation makes it possible to obtain an effective description for the region of stability of all equations of the family.

Key words: difference equation; aftereffect; exponential stability; uniform stability.

УДК 517.911, 517.968

О ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ПАРАМЕТРА

© Е.В. Малютина

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; запаздывание, зависящее от параметра; многозначные импульсные воздействия.

Исследуются свойства множества решений задачи Коши для функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями и запаздыванием, зависящим от параметров.

Пусть $\mathbf{L}^n[a, b]$ ($\mathbf{L}_\infty^n[a, b]$) — пространство суммируемых по Лебегу (измеримых, ограниченных в существенном) функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}^n[a, b]} = \int_a^b |x(t)| ds$ ($\|x\|_{\mathbf{L}_\infty^n[a, b]} = \text{vraisup}\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$); $t_k \in [a, b]$ ($a < t_1 < \dots < t_m < b$) — конечный набор точек; $\tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ — множество всех непрерывных на каждом из промежутков $[a, t_1]$, $(t_1, t_2]$, $\dots$, $(t_m, b]$ ограниченных функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k , $k = 1, 2, \dots, m$, с нормой $\|x\|_{\tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$.

Пусть K — метрическое пространство.

О п р е д е л е н и е 1. Функция $\tau : [a, b] \times K \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям Каратеодори [5], обладает свойством $\mathcal{A}$ в точке $\lambda_0 \in K$, если для любого $t \in [a, b]$ и любого $\lambda \in K$ выполняется неравенство $\tau(t, \lambda) \leq t$ и для любой последовательности $\lambda_i \rightarrow \lambda_0$ в пространстве K при $i \rightarrow \infty$ последовательность $\tau(t, \lambda_i) \rightarrow \tau(t, \lambda_0)$ в пространстве $\mathbf{L}_\infty^n[a, b]$ и справедливо равенство [6]

$$\mu \left(\bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{i=p}^{\infty} \{t \in [a, b] : \tau(t, \lambda_i) = a\} \right) = 0. \quad (1)$$